" JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS "

1934 г. ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том IV, вып. 1

1934 J. ZEITSCHRIFT FÜR TECHNISCHE PHYSIK Band IV, Heft 1

pp 1-29

see Gen. abstract p. 8

"ORIGINAL WORKS" (section title)

ОРИГИНАЛЬНЫЕ РАБОТЫ

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Л. И. Мандельштам и *Н. Д. Папалекси*

В статье дается приближенная теория явлений возбуждения колебаний в электрической колебательной системе, в которой отсутствуют явные источники электрических или магнитных сил при помощи периодического изменения ее параметров. Теория основана на развитых ранее общих методах Пуанкаре для нахождения периодических решений дифференциальных уравнений. Подробно рассматриваются частные случаи такого возбуждения при синусоидальном изменении самоиндукции и емкости в колебательной системе с одной степенью свободы, а также при изменении самоиндукции в регенерированной системе. Описываются опыты генерации колебаний при механическом изменении параметров как в системе с регенерацией, так и без регенерации. Эти опыты, подтверждающие возможность такого возбуждения, находятся в согласии с теорией.

Явление возбуждения колебаний при помощи периодического изменения параметров колебательной системы, известное в физике уже давно [Мельде (1)[1], Рейлей (2, 3, 4) и др. (5)], приобрело в настоящее время снова интерес в связи с осуществлением такого возбуждения в электрических колебательных системах. Хотя указания на возможность такого возбуждения, которое мы будем кратко называть параметрическим возбуждением, делались и раньше (3, 6), и оно несомненно играет значительную, но не всегда ясно осознанную роль, как например при обычной генерации тока в электротехнике, однако только в последнее время оно было сознательно осуществлено и было начато систематическое изучение его. Так Хегнером (8) и затем Гюнтер-Винтером (9) были описаны опыты, касающиеся возбуждения колебаний в электрической колебательной системе в области акустических частот периодическим намагничиванием железного сердечника катушки самоиндукции. Впоследствии, используя изменение, при вращении ротора, самоиндукции, образованной последовательным соединением двух фаз статора и двух фаз ротора трехфазного генератора, Гюнтер-Винтер (10) также осуществил параметрическое возбуждение колебаний. В самое последнее время появилось описание опытов И. Ватанабе, Т. Саито и И. Канто (11) над возбуждением колебаний механическим периодическим изменением магнитной цепи самоиндукции системы.

[1] Список литературы приведен в конце работы.

К теоретическому и экспериментальному изучению вопросов параметрического возбуждения колебаний мы приступили в 1927 г. (в НИИФ в Москве и в ЦРЛ) и сначала получили и исследовали явление возбуждения колебаний (до частот порядка 10^6 герц) при периодическом изменении намагничивания железного сердечника самоиндукции системы ([12]). В дальнейшем нами были исследованы в ЛЭФИ явления параметрического возбуждения и при механическом изменении параметров ([12, 13]), однако опубликование полученных результатов задерживалось до сих пор по патентным соображениям. Как указано в нашей заметке в Ж. Т. Ф. т. III, вып. 7, 1933, кроме осуществленного в начале 1931 г. параметрического возбуждения колебаний механическим изменением самоиндукции, нами в последнее время было также получено в ЛЭФИ параметрическое возбуждение посредством механического изменения емкости ([16]).

Что же касается теории явления параметрического возбуждения, то следует отметить, что в литературе уже имеются необходимые предпосылки для полного анализа условий возникновения колебаний. Этот вопрос, как известно, приводит к исследованию так называемых „нестабильных" решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, которые с математической стороны достаточно детально исследованы как вообще так и специально с точки зрения интересующей нас проблемы [Рейлей ([2, 8]), Андронов и Леонтович([14]), ван-дер-Поль и Стратт([15])]. Однако теория этих уравнений как линейных не может дать ответа на вопросы о величине стационарной амплитуды, ее устойчивости, процессе установления и т. д., адэкватная трактовка которых возможна только при помощи нелинейных дифференциальных уравнений. Указанные выше авторы (Гюнтер-Винтер, Ватанабе) ограничиваются только упрощенным выводом условий возникновения колебаний, основанным на рассмотрении соответствующего линейного дифференциального уравнения, и совершенно оставляют в стороне вопросы стационарной амплитуды. Эти вопросы, однако, являются не менее основными, чем самый вопрос о возникновении колебаний, и их разрешение необходимо не только для полного описания всего явления, но и для возможности всяких расчетов при практическом его использовании.

В настоящей статье излагается приближенная теория всего процесса параметрического возбуждения колебаний, исходящая из данных Пуанкаре общих методов нахождения периодических решений дифференциальных уравнений. В ней рассматривается как случай периодически изменяющейся самоиндукции, так и емкости, а также приводятся некоторые результаты опытов, произведенных в 1931 и 1932 гг. в ЛЭФИ. Дальнейший сюда относящийся экспериментальный и теоретический материал содержится в помещаемых ниже статьях В. А. Лазарева, В. П. Гуляева и В. В. Мигулина.

Результаты более детального экспериментального исследования явлений параметрического возбуждения периодическим изменением намагничивания сердечника самоиндукции, произведенного в ЦРЛ, будут приведены в другом месте.

В настоящей статье мы ограничиваемся только рассмотрением в первом приближении практически, может быть, наиболее важного случая параметрического возбуждения, когда частота изменения параметра приблизительно в два раза больше средней собственной частоты системы. Примененные в статье методы позволяют, однако, дать решение задачи и для других случаев, а также найти и дальнейшие приближения. Ряд относящихся сюда вопросов будет рассмотрен в другом месте.

THEORETICAL PART

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

§ 1. О возникновении колебаний при параметрическом возбуждении. Некоторые общие соображения и выводы

Как нами было показано в предыдущих работах ([13, 16]), легко, исходя из энергетических соображений, отдать себе отчет в физической стороне процесса возбуждения колебаний периодическим (скачкообразным) изменением емкости колебательной системы, не содержащей в себе никаких явных источников магнитных или электрических полей.

Повторим вкратце это рассуждение для случая изменения самоиндукции. Пусть в колебательной системе, состоящей из емкости C, омического сопротивления R и самоиндукции L, в некоторый момент времени, который мы примем за исходный, имеется ток i. Произведем в этот момент изменение самоиндукции на величину ΔL, что равносильно увеличению энергии, равному $\frac{1}{2}\Delta L i^2$. Предоставим теперь систему самой себе. Через промежуток времени, равный $1/4$ периода собственных колебаний системы, вся энергия системы перейдет из магнитной в электростатическую. В этот момент, когда ток будет равен нулю, возвратим самоиндукцию к ее первоначальной величине, что очевидно можно сделать, не затрачивая никакой работы, и затем снова предоставим систему самой себе. Через следующие $1/4$ периода собственных колебаний электростатическая энергия снова целиком перейдет в магнитную, и мы опять сможем начать новый цикл изменения самоиндукции. Если вложенная в начале цикла энергия будет больше потерь за время цикла, т. е. если

$$\frac{1}{2}\Delta L i^2 > \frac{1}{2} R i^2 \frac{T}{2}$$

или

$$\frac{\Delta L}{L} > \varepsilon,$$

где ε логарифмический декремент собственных колебаний системы, то тогда ток в конце каждого цикла будет больше, чем в начале его. Таким образом, повторяя эти циклы, т. е. изменяя самоиндукцию с частотой в два раза большей средней собственной частоты системы так, чтобы

$$\frac{\Delta L}{L} > \varepsilon,$$

можно возбудить в системе колебания, не воздействуя на нее никакой электродвижущей силой, как бы мал ни был начальный случайный заряд. Заметим, что даже в отсутствии каких-либо практически всегда неизбежно имеющих место случайных индукций (электрические линии передачи, магнитное поле земли, атмосферные заряды) мы принципиально всегда должны иметь в контуре случайные заряды в силу статистических флюктуаций.

Уже при таком грубом, скорее качественном, рассмотрении явлений возбуждения можно вывести две основные предпосылки для его возникновения: 1) необходимость выполнения определенной зависимости между частотой изменения параметра и „средней" собственной частотой системы и 2) необходимость соблюдения определенного соотношения между величиной относительного изменения параметра — так называемой глубиной модуляции его и величиной среднего логарифмического декремента системы.

Более полное рассмотрение явления возникновения колебаний при параметрическом возбуждении приводит к линейным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами. Например в случае изменения емкости системы по закону:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_0}(1+m\sin\nu t) \tag{1}$$

мы имеем следующее уравнение для $q=\int i\,dt$:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C_0}(1+m\sin\nu t)\,q=0, \tag{2}$$

которое с помощью преобразования

$$q=xe^{-\frac{R}{2L}t} \tag{3}$$

можно привести к виду:

$$\ddot{x}+\lambda^2(1+m_1\sin 2\tau)\,x=0, \tag{4}$$

где

$$\ddot{x}=\frac{d^2x}{d\tau^2},\quad \tau=\frac{\nu t}{2},\quad \omega_0^2=\frac{1}{LC_0},\quad 2\delta=\frac{R}{L},\quad \omega_1^2=\omega_0^2-\delta^2,$$

$$m_1=\frac{m\,\omega_0^2}{\omega_1^2},\quad \vartheta=\frac{2\delta}{\nu},\quad \lambda^2=\frac{4\,\omega_1^2}{\nu^2}. \tag{5}$$

Таким образом математически задача сводится в рассматриваемом случае к простейшему линейному дифференциальному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами (4), известному под именем уравнения Матье ([14, 15]). Заметим, что к уравнениям этого типа приводятся и многие другие проблемы: в области астрономии, оптики, теории упругости, акустики и др. С математической стороны они хорошо исследованы в работах Матье, Хилла, Пуанкаре и др.

Как известно, решение ур-ния (4) может быть представлено в виде:

$$x=C_1e^{h\tau}\chi(\tau)+C_2e^{-h\tau}\chi(-\tau), \tag{6}$$

где $\chi(\tau)$ есть периодическая функция с периодом π (или 2π).

Подставляя это решение в (3), получаем для q:

$$q=C_1e^{(h-\vartheta)\tau}\chi(\tau)+C_2e^{-(h+\vartheta)\tau}\chi(-\tau). \tag{7}$$

Из этого выражения следует, что вопрос о возбуждении колебаний приводится к нахождению условий, при которых амплитуда q будет постоянно возрастать. Из (17) видно, что это будет иметь место тогда, когда вещественная часть h будет абсолютно больше ϑ.

Условие параметрического возбуждения, следовательно, тесно связано с величиной h, т. е. с характеристическим показателем решения уравнения Матье (4). Зависимость h от параметров этого уравнения m и $\lambda = \frac{2\omega_1}{\nu}$ можно, как это сделали А. Андронов и М. Леонтович [14], качественно изобразить графически (рис. 1), выделив на плоскости $\left(m, \frac{2\omega_1}{\nu}\right)$ отдельно области, внутри которых h имеет реальную часть. Как видно из рисунка, эти области, являющиеся областями „неустойчивых" решений ур-ния (4), расположены около значений $\frac{2\omega_1}{\nu} = 1, 2, 3, \ldots$. При наличии затухания, т. е. для ур-ния (2) эти области неустойчивости сильно уменьшаются (заштрихованные области на рис. 1).

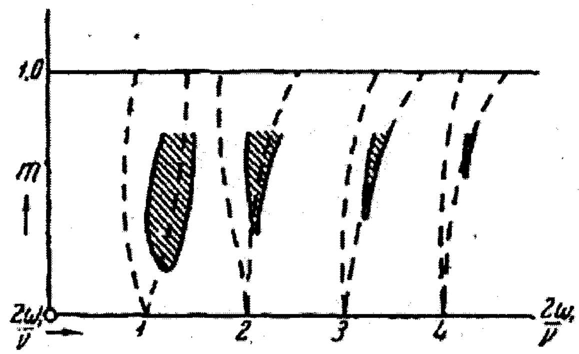

Рис. 1. Области неустойчивости (работа Андронова и Леонтовича).

ANDRONOV + LEONTOVICH

Пользуясь методом, указанным Рейлеем [3, 4], можно приближенно определить границы этих областей неустойчивости. Так границы первой области неустойчивости (около значения $\frac{2\omega_1}{\nu} = 1$) даются с точностью до m^2 кривыми:

$$\frac{2\omega_1}{\nu} = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{m^2}{4} - 4\vartheta^2}} \quad \text{и} \quad \frac{2\omega_1}{\nu} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{m^2}{4} - 4\vartheta^2}}. \tag{8}$$

Это значит, что при заданных m и ϑ и значениях $\frac{2\omega_1}{\nu}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\sqrt{1 + \sqrt{\frac{m^2}{4} - 4\vartheta^2}} \geqq \frac{2\omega_1}{\nu} \geqq \sqrt{1 - \sqrt{\frac{m^2}{4} - 4\vartheta^2}}, \tag{9}$$

решение ур-ния (2) „неустойчиво".

Для определения второй области „неустойчивости" (около $\frac{2\omega_1}{\nu} = 2$) необходимо учесть члены m^4. Как показали А. Андронов и М. Леонтович [14]) в этом случае имеем:

$$\sqrt{4 + \frac{2}{3}m^2 + \sqrt{m^4 - 64\vartheta^2}} \geqq \frac{2\omega_1}{\nu} \geqq \sqrt{4 + \frac{2}{3}m^2 - \sqrt{m^4 - 64\vartheta^2}}. \tag{10}$$

Таким образом величина (ширина) области „неустойчивости" уменьшается с порядком ее n как m^n.

Условия (9) и (10) содержат, как следствие, следующие дополнительные условия.

Для первой области неустойчивости:

$$\frac{m^2}{4} > 4\vartheta^2 \quad \text{или} \quad m > 4\vartheta, \tag{11}$$

для второй

$$m^4 > 64\vartheta^2 \quad \text{или} \quad m > 2\sqrt{2\vartheta}. \tag{12}$$

Как видно из (11) и (12), условие параметрического возбуждения при приблизительной настройке системы на частоту, равную частоте изменения параметра, значительно труднее выполнить, чем условие возбуждения при настройке системы на половинную частоту, так как оно при данном затухании требует гораздо большей глубины модуляции параметра m. Еще более тяжелы условия для параметрического возбуждения при соотношении частот $\frac{2\omega_1}{\nu} = 2, 3 \ldots$ и т. д. Поэтому наибольший практический интерес в первую очередь представляет случай $\frac{2\omega_1}{\nu} = 1$, который почти исключительно и разбирается в настоящем исследовании.

Как видно из предыдущего, вопрос об условиях возникновения колебаний при параметрическом воздействии решается соотношениями (9) и (11). Эти соотношения, с одной стороны, указывают, каким условиям должно удовлетворять затухание системы, чтобы в ней при данном изменении параметра могли возникать колебания, а с другой стороны, они показывают, в каких пределах мы можем менять либо сопротивление системы (нагрузку), либо расстройку системы от точного параметрического резонанса, не нарушая возможности возникновения колебаний. Однако эти соотношения не дают, да и не могут дать ответа на вопрос о том, установится ли стационарная амплитуда колебаний, и каково будет ее значение. В самом деле, исходное ур-ние (2) ответа на этот вопрос, как линейное уравнение, дать не может. Иными словами, если бы система действительно все время подчинялась этому уравнению, то при соблюдении условий (9) амплитуда колебаний неограниченно возрастала бы.

Линейная система, таким образом, служить генератором переменного тока не может. Для того чтобы в системе установилась стационарная амплитуда, необходимо, чтобы она подчинялась нелинейному дифференциальному уравнению. Рассмотренное нами ур-ние (2) может явиться только приближенным для некоторого конечного амплитудного интервала. Здесь оно сохраняет полный смысл и позволяет решить вопрос о возникновении колебаний.

Что явление происходит именно так, вполне подтверждают и описываемые ниже опыты. Если не вводить в колебательную систему нелинейности, то при периодическом изменении в ней параметров наблюдается следующая картина. Как только условия возбуждения соблюдены, в контуре возникает ток, амплитуда которого непрерывно нарастает. В наших опытах это нарастание доходило до того, что изоляция конденсатора или подводящих проводов не выдерживала, и приходилось прекращать опыт.

Для получения стационарного состояния в систему приходилось вводить проводник с нелинейной характеристикой, например катушку с железным сердечником, лампы накаливания и т. п. Математически, в случае введения в рассматриваемую систему например катушки с железным сердечником, мы имеем дело уже с уравнением:

$$\frac{d\Phi(i)}{dt} + Ri + \frac{1 + m \sin \nu t}{C_0} \int i \, dt = 0,$$

где нелинейная зависимость между током и магнитным потоком в контуре $\Phi(i)$ есть некоторая заданная функция i, например в виде степенного ряда.